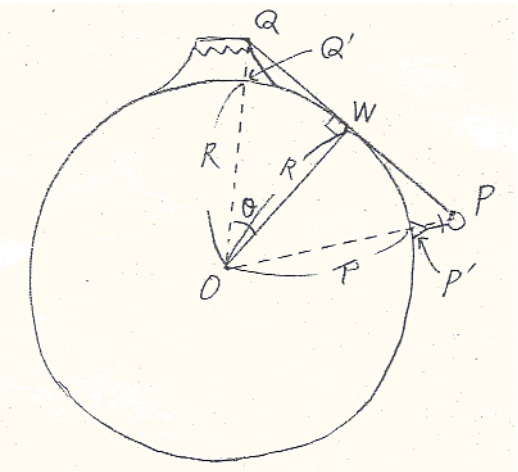
地球の半径を測る

先日の２０１８年９月３日の中日新聞夕刊に、「富士山ココ見える」という記事が載っていた。
これは日本地図センターがネットで公開している富士山が見える地域を地図上で確認できるサイトである。（https://info.jmc.or.jp/fujisankoko）
今回は数学Ⅲの近似式の応用ということで、このデータを使って地球の半径を計算するという授業を行ったところ、生徒から興味をもったとの反応が多数あったので、ここで紹介させていただきたいと思う。以下と同じような計算は多くの文献に載っていると思われるが、私の手元には資料がなく、また高校生でも十分考えることができる内容であると思われるため、周知の内容であればご容赦願いたい。

地球の大きさを初めて測ったといえば、エラトステネスの話が有名である。彼は夏至の日の正午にはシエネの井戸には太陽光線が真上から差し込むことと、アレクサンドリアでは太陽光線の角度が真上から7.2°傾いていることから、地球の周長を求めたといわれている。（２つの町の間の距離は歩いて測ったといわれている。）詳しくは適当な参考文献を参照されたい。

今回の授業は以下のように展開した。



富士山の高さをH、目の高さをh、地球の半径をRとする。（単位はすべてkm）地球は球形であると仮定した。Oは地球の中心Pは目の位置、Qは富士山の山頂、P',Q'はそえぞれOP,OQと地表の交点とする。

三平方の定理より

$$QW^2=(R+H)^2-R^2=2RH+H^2$$

ゆえに、 $QW=\sqrt{2RH+H^2}=\sqrt{2RH}\sqrt{1+\frac{H}{2R}}$

ここで、近似式 $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$ を使うと、 $QW\approx\sqrt{2RH}\left(1+\frac{H}{4R}\right)\approx\sqrt{2RH}$

（ここで富士山の高さHは4Rより十分小さいということを用いた）
同様にして $PW\approx\sqrt{2Rh}$ を得る。
ここで $\tan\theta$ の $\theta=0$ のまわりの近似式を考えると（ここは生徒に計算させた）
$\theta\approx 0$ のとき $\tan\theta\approx\theta$ であるので、これを使うと、
$QW\approx$弧$Q'W$ 、 $PW\approx$弧$P'W$ であることがわかる。
（この辺りは当たり前のことに感じる生徒も多いと思うが、数学Ⅲの授業ではあえて式で説明した。数学活用などの授業で実践する場合は、ここまでする必要はないと思われる。）
ゆえに、弧 $Q'P'\approx QP=QW+WP=\sqrt{2RH}+\sqrt{2Rh}=\sqrt{2R}\left(\sqrt{H}+\sqrt{h}\right)$
一方、新聞記事（あるいはWebサイト）でみると、三重県の松坂市辺りでも富士山は見えるようである。したがって弧Q'P'=230kmと見積もるのが適当であると思われる。
これを代入すると、

$$230=\sqrt{2R}\left(\sqrt{H}+\sqrt{h}\right)$$

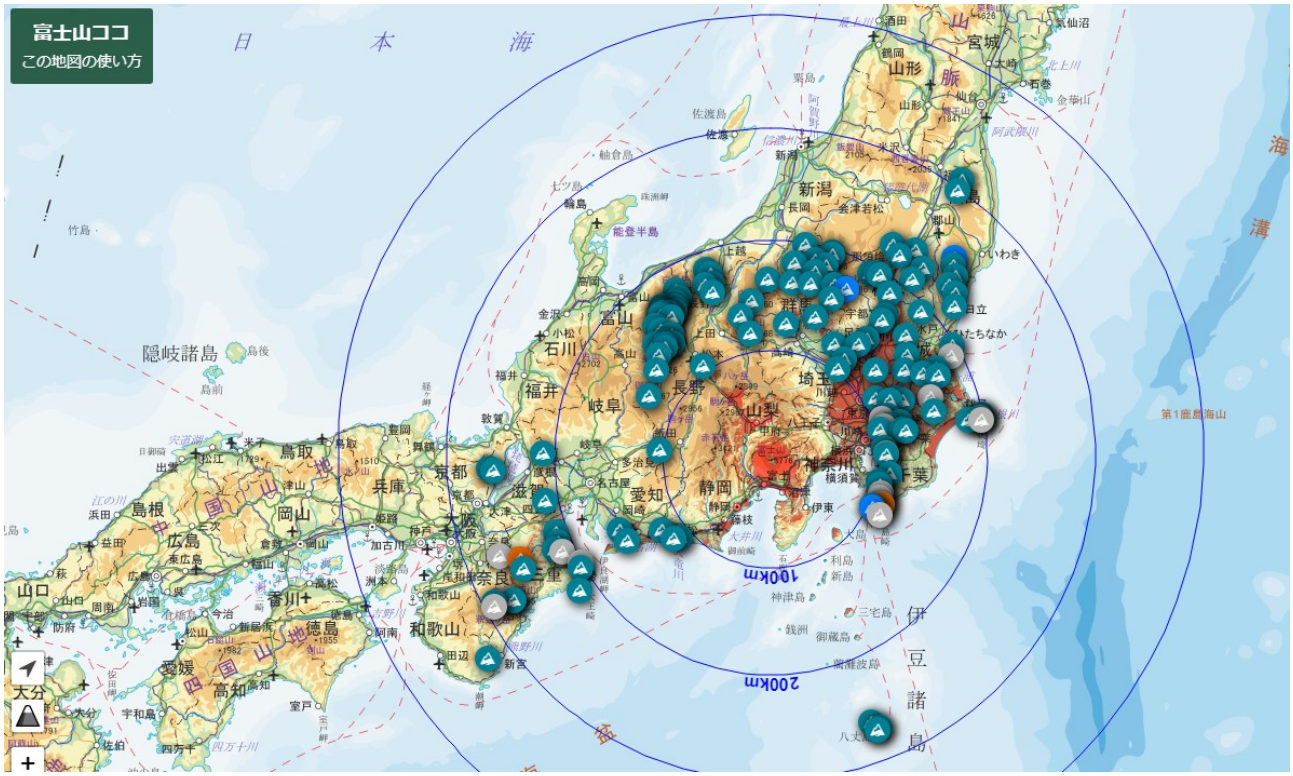
よって、 $\sqrt{R}=\dfrac{230}{\sqrt{2}(\sqrt{H}+\sqrt{h})}$ である。

ここで $H=3776\times10^{-3}$ であり、目の高さは 150cm と仮定し、 $h=1.5\times10^{-3}$ とする。電卓で計算すると、

$$\sqrt{R}=\frac{230}{\sqrt{2}(\sqrt{H}+\sqrt{h})}=\frac{230}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{\sqrt{3776}}{10}+\dfrac{\sqrt{1.5}}{10}\right)}=\frac{2300\sqrt{5}}{\sqrt{3776}+\sqrt{1.5}}\approx82.058$$ となる。

2 乗して、 $R\approx6733.67$ (km)を得る。

Web サイトで地球の半径を調べたところ、R=6378.1 km であるとのことなので、やや粗い近似になってしまったが、大体近い値が得られたのではなかろうか。



Web ページ　https://info.jmc.or.jp/fujisankoko/#7/35.666/138.560　より