スカイダイビングの速度について（微分方程式の応用）

空気抵抗がある場合にはスカイダイバーには、 $F=mg-$ （空気抵抗）という力が働く。
ここで流体力学の理論によると、スカイダイビングの場合の空気抵抗の大きさは、物体の速度を v とすると v^2 に比例することが知られている。
（実は空気抵抗は v に比例する場合と v^2 に比例する場合があるのだが、それは物理的状況でかわってくるのである。人間程度の大きさの物体が、時速 200km くらいで落下する場合は、空気抵抗は v^2 に比例するとみるのが適切であり、また物体の大きさがごく小さく、速度がごく遅く、流体の粘性がごく高い場合には空気抵抗は v に比例するとみるのが適切である。）

今の場合は空気抵抗はに v^2 に比例し、比例定数は k=0.25kg/m くらいである。
したがって、 $F=mg-kv^2$ 、すなわち $m\dfrac{dv}{dt}=mg-kv^2$ である。
この微分方程式は変数分離法で解ける。（やってみよ）
整理すると、 $\displaystyle\int\frac{dv}{v^2-\frac{mg}{k}}=\int\left(-\frac{k}{m}\right)dt$ ここで簡単のため、 $V=\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$ とおくと

$$\int\frac{dv}{v^2-V^2}=\int\left(-\frac{k}{m}\right)dt$$

ここで $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$ であったから、
これを用いれば左辺は、 $\displaystyle\int\frac{dv}{v^2-V^2}=\frac{1}{2V}\log\left|\frac{v-V}{v+V}\right|+C_1$ となる。
また、右辺は $\displaystyle\int\left(-\frac{k}{m}\right)dt=-\frac{k}{m}t+C_2$
したがって、 $\displaystyle\frac{1}{2V}\log\left|\frac{v-V}{v+V}\right|=-\frac{k}{m}t+C_3$
変形して、 $\displaystyle\log\left|\frac{v-V}{v+V}\right|=-\frac{2k}{m}Vt+C_4=-\frac{2k}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}t+C_4=-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_4$
ここで計算を簡単にするために $\sqrt{\dfrac{kg}{m}}=\dfrac{1}{T}$, $\dfrac{t}{T}+C=\theta$ とおくと

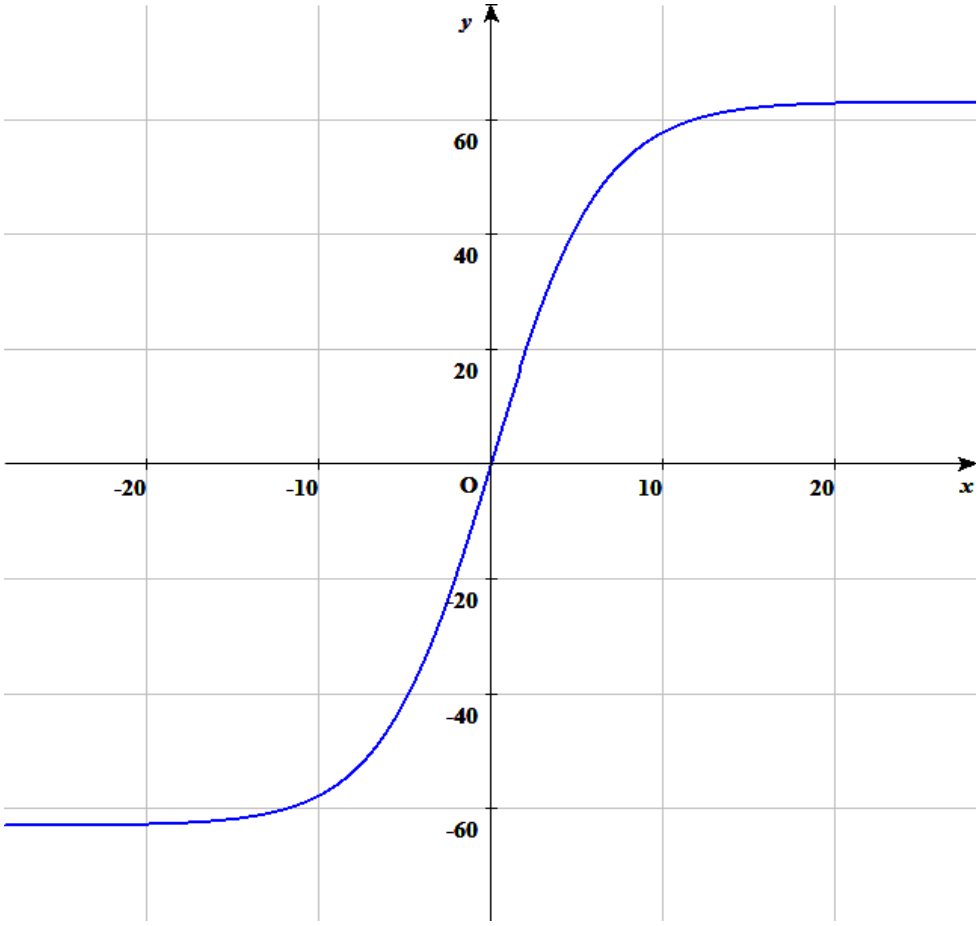
$$\log\left|\frac{v-V}{v+V}\right|=-2\left(\frac{t}{T}+C\right)=-2\theta$$

これより、 $\displaystyle\left|\frac{v-V}{v+V}\right|=e^{-2\theta}$
ここで、 $t=0$ のとき $v=0$ であるので、 $v<V$ である。（v は 0 からだんだん大きくなるから）
ゆえに $\dfrac{V-v}{V+v}=e^{-2\theta}$

これを v について解くと、 $\displaystyle v=V\cdot\frac{1-e^{-2\theta}}{1+e^{-2\theta}}=V\cdot\frac{1-e^{-2(\frac{t}{T}+C)}}{1+e^{-2(\frac{t}{T}+C)}}$

$t=0$ のとき $v=0$ であるので、C=0 である。
ゆえに $\displaystyle v=V\cdot\frac{1-e^{\frac{-2t}{T}}}{1+e^{\frac{-2t}{T}}}=V\cdot\frac{e^{\frac{t}{T}}-e^{-\frac{t}{T}}}{e^{\frac{t}{T}}+e^{-\frac{t}{T}}}\to V=\sqrt{\frac{mg}{k}}$ $(t\to\infty)$ となる。
ここで実際に数値をあてはめてみる。
m=100kg（スカイダイビング一式）、g=9.8 m/s^2 、k=0.25kg/m であると考えると、
V=62.6m/s ～63m/s である。これを終端速度という。

$T=\sqrt{\dfrac{m}{kg}}=\sqrt{\dfrac{100}{0.25\times 9.8}}=6.388\approx 6.4$　としてグラフを書いた。



ここで双曲線関数を用いて表してみる。

$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \tanh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$　であるから，　$v=V\tanh\left(\dfrac{t}{T}\right)$

である。

さらにこの式を、マクローリン展開を用いて近似しよう。

マクローリン展開とは　$x=0$　におけるテイラー展開のことで、次の式である。

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

ちなみにテイラー展開は

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$　である。

マクローリン展開を有限で打ち切れば、近似式

$f(x)\approx f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3$　を得る。

$(\sinh x)'=\cosh x$，$(\cosh x)'=\sinh x$，$(\tanh x)'=\dfrac{1}{\cosh^2 x}$　を用いて計算すれば、次のようになる。

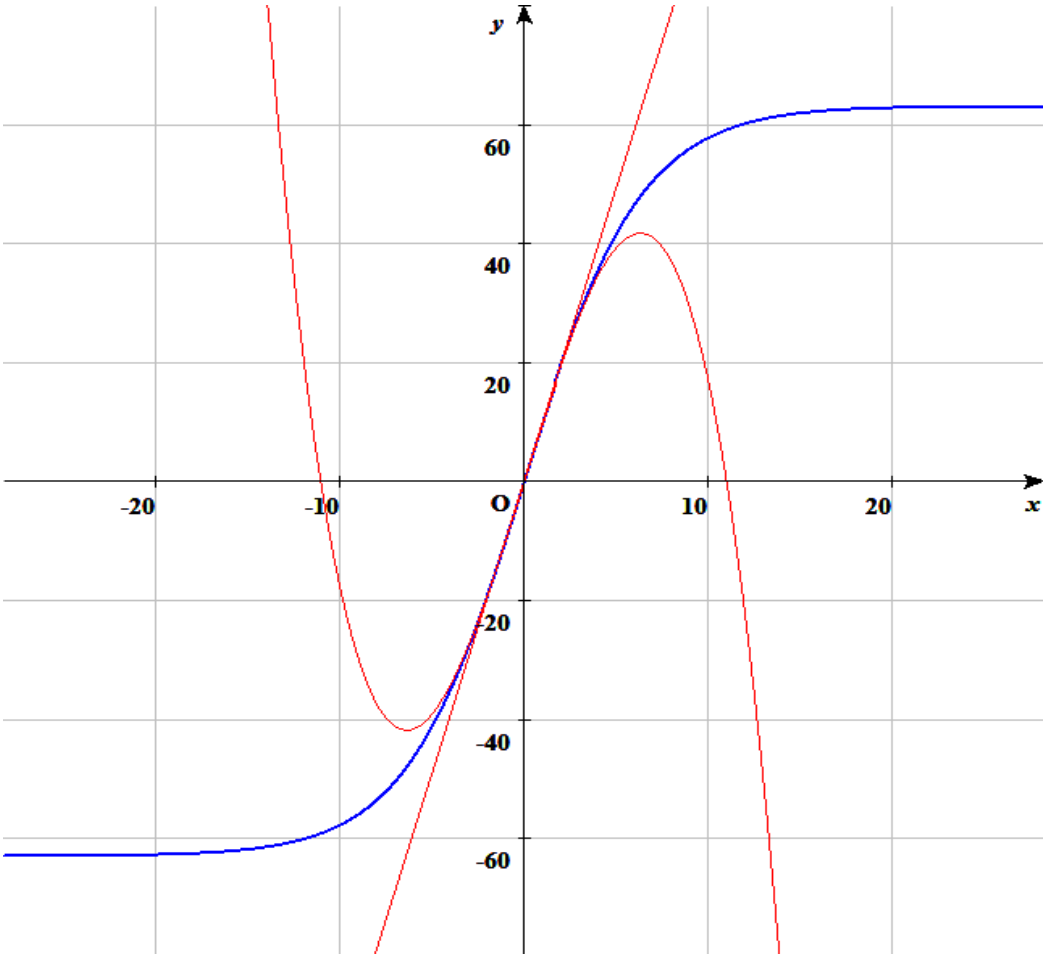
$$v'(t)=\frac{V}{T}\cdot\frac{1}{\cosh^2\left(\dfrac{t}{T}\right)}\quad,\quad v''(t)=-2\cdot\frac{V}{T^2}\cdot\frac{\sinh\left(\dfrac{t}{T}\right)}{\cosh^2\left(\dfrac{t}{T}\right)}\qquad v'''(t)=\frac{V}{T^3}\cdot\frac{4\sinh^2\left(\dfrac{t}{T}\right)-2}{\cosh^4\left(\dfrac{t}{T}\right)}$$

したがって、 $v(0)=V\tanh 0=0$ ， $v'(0)=\frac{V}{T}\cdot\frac{1}{\cosh^2 0}=\frac{V}{T}$ ， $v''(0)=-2\cdot\frac{V}{T^2}\cdot\frac{\sinh 0}{\cosh^2 0}=0$

$$v'''(0)=\frac{V}{T^3}\cdot\frac{4\sinh^2 0-2}{\cosh^4 0}=-\frac{2V}{T^3}$$

したがって、先ほどの近似式によれば

$$v(t)\approx v(0)+\frac{v'(0)}{1!}t+\frac{v''(0)}{2!}t^2+\frac{v'''(0)}{3!}t^3=0+\frac{V}{T}t+0+\frac{1}{3!}\left(-\frac{2V}{T^3}\right)t^3=\frac{V}{T}t-\frac{1}{3}\frac{V}{T^3}t^3$$

ここで $T=\sqrt{\frac{m}{gk}}$ ， $V=\sqrt{\frac{mg}{k}}$ を代入すれば、 $v(x)\approx gt-\frac{g^2}{3}\cdot\frac{k}{m}t^3$ となる。

ちなみに1次近似は $v(x)\approx gt$ となる。