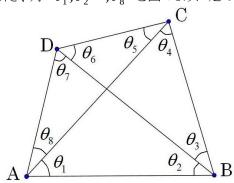
## 正弦定理の辺の比の性質への応用

2020年の岩手大学の入試問題に次のようなものがあった。 四角形 ABCD に2本の対角線を引き、角  $\theta_1, \theta_2 \cdots, \theta_8$  を図のように定める。



(2)  $\sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \theta_5 \sin \theta_7 = \sin \theta_2 \sin \theta_4 \sin \theta_6 \sin \theta_8$  となることを示せ。

解答は、例えば∠ABC に着目して正弦定理を用いると

$$\frac{BC}{\sin\theta_1} = \frac{AB}{\sin\theta_4}$$
 となるから、これより  $\frac{BC}{AB} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_4}$ 

同様に他の△BCD、△CDA、△DABでも考えれば、向かい合う辺の比とsinの値の比が等しくなるので

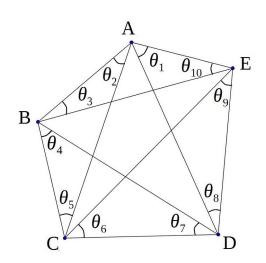
$$\frac{CD}{BC} = \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_6}$$
 ,  $\frac{DA}{CD} = \frac{\sin \theta_5}{\sin \theta_8}$  ,  $\frac{AB}{DA} = \frac{\sin \theta_7}{\sin \theta_2}$  を得る。

これらを辺々掛け合わせることで、

$$1 = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{CD}{BC} \cdot \frac{DA}{CD} \cdot \frac{AB}{DA} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_4} \cdot \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_6} \cdot \frac{\sin \theta_5}{\sin \theta_8} \cdot \frac{\sin \theta_7}{\sin \theta_2}$$
 となり、分母を払えば

等式  $\sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \theta_5 \sin \theta_7 = \sin \theta_2 \sin \theta_4 \sin \theta_6 \sin \theta_8$  を得る。

証明中、難しい知識や考え方は用いていない。正弦定理を用いているだけだが、とてもバランスの良い関係式が成り立っている。このようなことが成り立つのは、各辺が2回ずつ用いられていることに起因しているからだと考えられる。そして多角形への拡張も容易である。例えば五角形の場合、同様に考えて



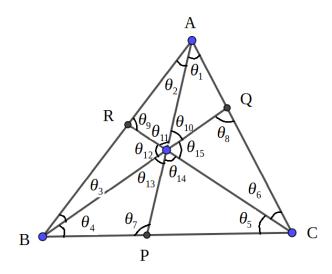
$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin \theta_5}{\sin \theta_2}$$
 ,  $\frac{BC}{CD} = \frac{\sin \theta_7}{\sin \theta_4}$  ,  $\frac{CD}{DE} = \frac{\sin \theta_9}{\sin \theta_6}$  ,  $\frac{DE}{EA} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_8}$  ,  $\frac{EA}{AB} = \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_{10}}$  を得るので

これらを辺々掛け合わせることで、

$$1 = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{DE}{EA} \cdot \frac{EA}{AB} = \frac{\sin \theta_5}{\sin \theta_2} \cdot \frac{\sin \theta_7}{\sin \theta_4} \cdot \frac{\sin \theta_9}{\sin \theta_6} \cdot \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_8} \cdot \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_{10}}$$
 となり、分母を払えば

 $\sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \theta_5 \sin \theta_7 \sin \theta_9 = \sin \theta_2 \sin \theta_4 \sin \theta_6 \sin \theta_8 \sin \theta_{10}$  を得る。

どころで、この等式を三角形の場合に成り立つがどうか検討してみると、当たり前のことではあるが、1=1という自明な式しか得られない。 で、同様な式が成り立つような状況はないかと考えてみたところ、チェバの定理が関係していることがわかった。



図において、  $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$  の性質を使いながら正弦定理を繰り返し用いると、

$$\frac{AC}{CP} = \frac{\sin\theta_7}{\sin\theta_1} , \quad \frac{BP}{AB} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_7} , \quad \frac{AB}{QA} = \frac{\sin\theta_8}{\sin\theta_3} , \quad \frac{CQ}{BC} = \frac{\sin\theta_4}{\sin\theta_8} , \quad \frac{BC}{RB} = \frac{\sin\theta_9}{\sin\theta_5} , \quad \frac{AR}{AC} = \frac{\sin\theta_6}{\sin\theta_9}$$

これらを掛け合わせて

$$\frac{AC}{CP} \cdot \frac{BP}{AB} \cdot \frac{AB}{QA} \cdot \frac{CQ}{BC} \cdot \frac{BC}{RB} \cdot \frac{AR}{AC} = \frac{\sin \theta_7}{\sin \theta_1} \cdot \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_7} \cdot \frac{\sin \theta_8}{\sin \theta_3} \cdot \frac{\sin \theta_9}{\sin \theta_8} \cdot \frac{\sin \theta_9}{\sin \theta_5} \cdot \frac{\sin \theta_6}{\sin \theta_9}$$

となり、等式

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \cdot \frac{\sin \theta_4}{\sin \theta_3} \cdot \frac{\sin \theta_6}{\sin \theta_5} \quad \cdots \quad (1)$$

を得る。

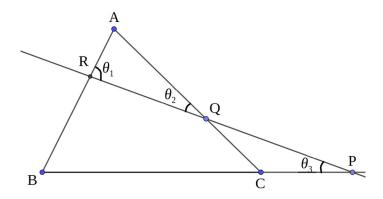
ところが、一方、AP, BQ, CR の交点をOとすれば

$$\frac{BO}{AO} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_3}$$
 ,  $\frac{CO}{BO} = \frac{\sin \theta_4}{\sin \theta_5}$  ,  $\frac{AO}{CO} = \frac{\sin \theta_6}{\sin \theta_1}$  が得られ、これらを掛け合わせることで、

$$\frac{BO}{AO} \cdot \frac{CO}{BO} \cdot \frac{AO}{CO} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3} \cdot \frac{\sin\theta_4}{\sin\theta_5} \cdot \frac{\sin\theta_6}{\sin\theta_1} = 1 \quad \cdots \\ \text{②となるので、①②よりチェバの定理が得られることになる。}$$

副産物として、今回の設定でも、  $\sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \theta_5 = \sin \theta_2 \sin \theta_4 \sin \theta_6$  が成り立つことがわかる。

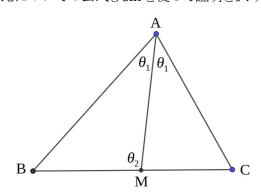
次はメネラウスの定理について sin で考えてみる。今回は図に対称性がないので、上記のような等式が成り立つことは期待できない。そこで sin を使ってメネラウスの定理が導けることを確認するという方針に変更する。



図から、 
$$\frac{AR}{AQ} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$$
 ,  $\frac{BP}{RB} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_3}$  ,  $\frac{CQ}{CP} = \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_2}$  となるから、辺々掛け合わせると

$$\frac{AR}{AQ} \cdot \frac{BP}{RB} \cdot \frac{CQ}{CP} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} \cdot \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3} \cdot \frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_2} = 1 \quad となって、メネラウスの定理を得る。$$

最後に角の二等分線の分ける比についての公式も sin を使って証明を試みる。



図より 
$$\frac{BM}{AB} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$$
 ,  $\frac{CM}{AC} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$  であるから、  $\frac{BM}{AB} = \frac{CM}{AC}$ 

よって AB:AC=BM:CM が成り立つ。

ここまで教科書に出ている基本的な定理を正弦定理で証明してみた。正弦定理は辺の比が sin で表せるため、辺の比が現れるような定理の証明には適している。正弦定理の新たな活用法につながれば幸いである。