２次曲線の準線と離心率について

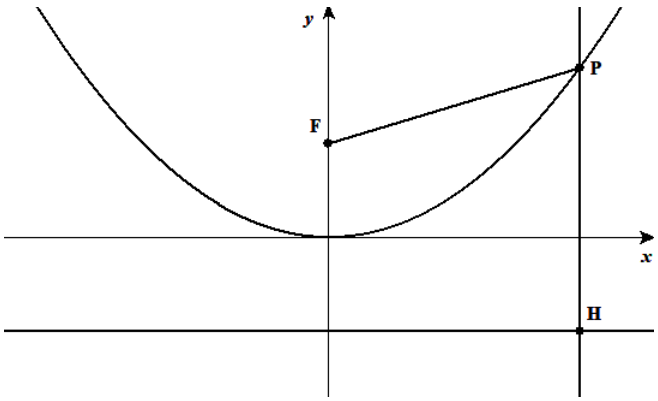
定義を振り返ってみよう

・放物線・・・１つの定点（焦点）と定直線（準線）を用いている

・楕円・双曲線・・・２つの定点（焦点）を用いている

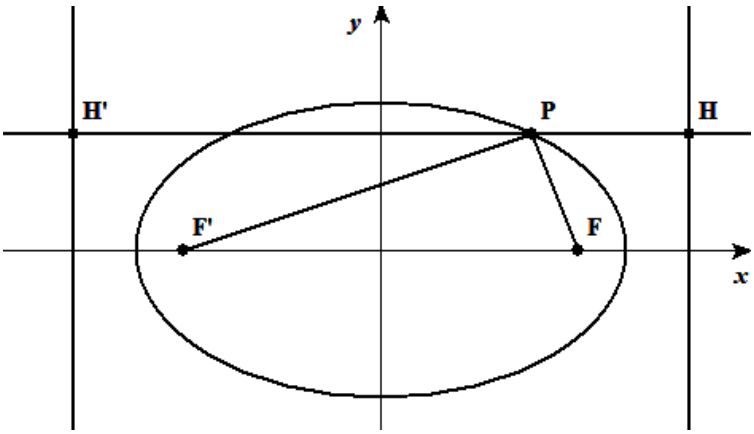
上の定義に一貫性がないことに疑問を持った人はいるでしょうか？
ここでは３つの２次曲線を統一した考えで定義できるかということについて考えよう。

〈放物線の場合〉
学習したように、 $PF=PH$ であるから
$\dfrac{PF}{PH}=1$ が成り立つ。



楕円や双曲線の場合も $\dfrac{PF}{PH}$ について考えてみよう。

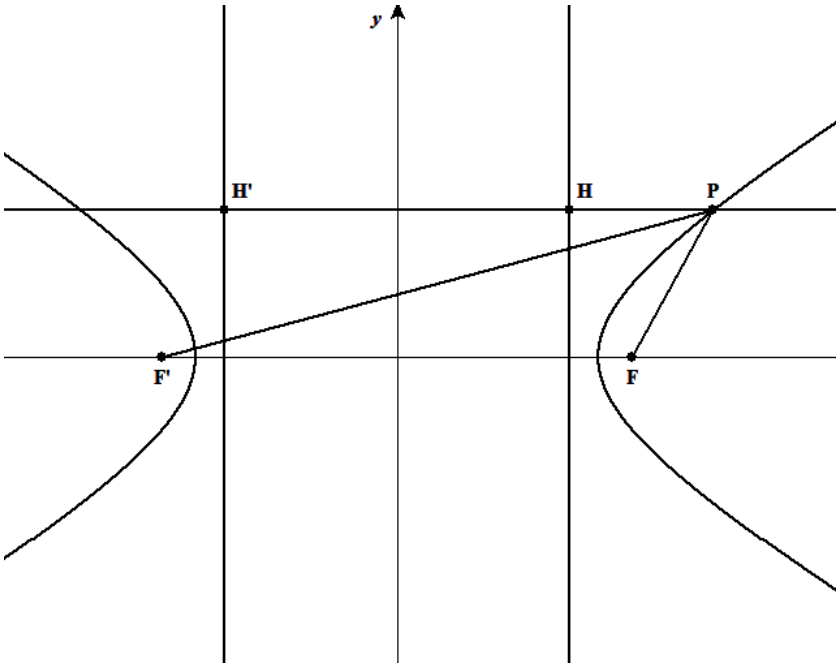
〈楕円の場合〉
PF を求めよう。
焦点を $F(c,0),F'(-c,0)$ とし、 $PF+PF'=2a$ （一定）とする。（ $a>c>0$ ）
$P(x,y)$ とおく。
$PF+PF'=2a$ と $PF-PF'$ の積を考えて
$(PF-PF')(PF+PF')=PF^2-PF'^2=\{(x-c)^2+y^2\}-\{(x+c)^2+y^2\}=-4cx$ であるので
$2a(PF-PF')=-4cx$ ゆえに、 $PF-PF'=-\dfrac{2cx}{a}$ となる。
$PF+PF'=2a$ と連立すれば、
$2PF=2a-\dfrac{2cx}{a}$ すなわち、 $PF=a-\dfrac{cx}{a}=\dfrac{c}{a}\left(\dfrac{a^2}{c}-x\right)$ となる。
ここで直線 l を $x=\dfrac{a^2}{c}$ とおくと、 $PF=\dfrac{c}{a}PH$ すなわち、 $\dfrac{PF}{PH}=\dfrac{c}{a}<1$ となる。



〈双曲線の場合〉
PF を求めよう。
焦点を $F(c,0),F'(-c,0)$ とし、 $PF-PF'=\pm 2a$ （一定）とする。（ $c>a>0$ ）
$P(x,y)$ とおく。

同様に考えて
$(PF-PF')(PF+PF')=PF^2-PF'^2=-4cx$ であるので
$\pm 2a(PF+PF')=-4cx$ ゆえに、 $PF-PF'=-\dfrac{2cx}{a}$ となる。
$PF-PF'=\pm 2a$ と連立すれば、
$2PF=\pm\left(2a-\dfrac{2cx}{a}\right)$ すなわち、 $PF=\pm\left(a-\dfrac{cx}{a}\right)=\mp\dfrac{c}{a}\left(x-\dfrac{a^2}{c}\right)$ となる。

ここで直線 l を $x=\dfrac{a^2}{c}$ とおく。上の式の∓の複号について、x が正ならば、下の符号を用い、x が負ならば、上の符号になっていることに注意すれば、 $PF=\dfrac{c}{a}PH$ すなわち、 $\dfrac{PF}{PH}=\dfrac{c}{a}>1$ となる。

（定義）

この一定値 $\dfrac{PF}{PH}=\dfrac{c}{a}$ を e で表し、2 次曲線の離心率と呼ぶ。また、楕円と双曲線の対称性を考慮し、 $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$ を楕円と双曲線の準線と呼ぶ。