三角形の内接円の半径 r と傍接円の半径 r_A, r_B, r_C の関係

三角形の内接円の半径 r と傍接円の半径 r_A, r_B, r_C の間には、次の関係式が成立する。
三角形の面積を S とする。

定理1（シュタイナー）

$$\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

（証明）

$S=r_A(s-a)=r_B(s-b)=r_c(s-c)$ ただし $s=\dfrac{a+b+c}{2}$

これより $\dfrac{1}{r_A}=\dfrac{s-a}{S}$, $\dfrac{1}{r_B}=\dfrac{s-b}{S}$, $\dfrac{1}{r_C}=\dfrac{s-c}{S}$

ゆえに $\dfrac{1}{r_A}+\dfrac{1}{r_B}+\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{s-a}{S}+\dfrac{s-b}{S}+\dfrac{s-c}{S}=\dfrac{s-a+s-b+s-c}{S}=\dfrac{3s-(a+b+c)}{S}=\dfrac{s}{S}=r$ （終）

定理2（ボビリエー）

$$r_A+r_B+r_C=4R+r$$

（証明）

$$r_A+r_B+r_C-r=\frac{S}{s-a}+\frac{S}{s-b}+\frac{S}{s-c}-\frac{S}{s}$$

$$= S\cdot\frac{s(s-b)(s-c)+s(s-a)(s-c)+s(s-a)(s-b)-(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{4abc}{\sqrt{(2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c))}}$$ （計算は Maxima による）

$$= \frac{abc}{S}=4R$$ よって成り立つ。（終）

wxMaxima document 1 / 1

```
(%i1) s:(a+b+c)/2;
```

(%o1) $\dfrac{c+b+a}{2}$

```
(%i2) S:sqrt(s*(s-a)*(s-b)*(s-c));
```

(%o2) $\dfrac{\sqrt{(c+b+a)\left(\frac{c+b+a}{2}-a\right)\left(\frac{c+b+a}{2}-b\right)\left(\frac{c+b+a}{2}-c\right)}}{\sqrt{2}}$

```
(%i3) (1/S)*(s*(s-b)*(s-c)+s*(s-a)*(s-c)+s*(s-a)*(s-b)-(s-a)*(s-b)*(s-c));
```

(%o3) $\left(\sqrt{2}\left(\left(a-\frac{c+b+a}{2}\right)\left(\frac{c+b+a}{2}-b\right)\left(\frac{c+b+a}{2}-c\right)+\frac{(c+b+a)\left(\frac{c+b+a}{2}-b\right)\left(\frac{c+b+a}{2}-c\right)}{2}+\frac{(c+b+a)\left(\frac{c+b+a}{2}-a\right)\left(\frac{c+b+a}{2}-c\right)}{2}+\frac{(c+b+a)\left(\frac{c+b+a}{2}-a\right)\left(\frac{c+b+a}{2}-b\right)}{2}\right)\right)/\sqrt{(c+b+a)\left(\frac{c+b+a}{2}-a\right)\left(\frac{c+b+a}{2}-b\right)\left(\frac{c+b+a}{2}-c\right)}$

```
(%i4) ratsimp(%);
```

(%o4) $$\frac{4\,a\,b\,c}{\sqrt{-c^4-(-2\,b^2-2\,a^2)\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}}$$

```
(%i5) factor(%);
```

(%o5) $$\frac{4\,a\,b\,c}{\sqrt{-c^4-(-2\,b^2-2\,a^2)\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}}$$

```
(%i6) radcan(%);
```

(%o6) $$\frac{4\,a\,b\,c}{\sqrt{-c+b+a}\,\sqrt{c-b+a}\,\sqrt{c+b-a}\,\sqrt{c+b+a}}$$

（参考文献）

[1]新数学事典（大阪書籍）