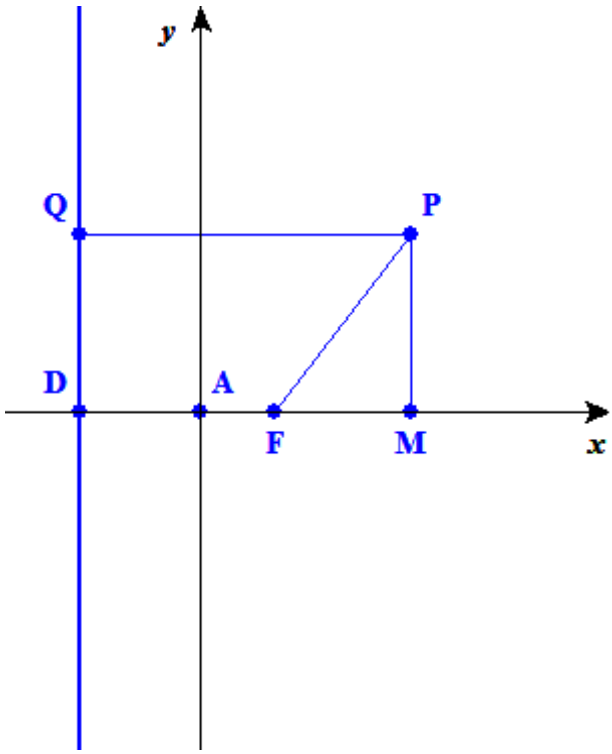
# 2次曲線の準線について

離心率により、2次曲線を定義することで準線が定義される。

(記号)PF でPからFに向かう符号付きの長さを表す。(座標軸が導入されている場合の話)
$\overline{PF}$ で線分の長さ(距離)を表す。

$F$ を定点、 $f$ をFを通らない定直線とする。 $\overline{PF}:\overline{PQ}=e:1$ を満たす点Pの軌跡は
$0<e<1$ のとき楕円、 $e=1$ のとき放物線、 $e>1$ のとき双曲線を表す。
$F$ を焦点、 $f$ を $F$ に応ずる準線、 $e$ を離心率という。

(証明)Fから $f$ に垂線を下ろし、その足をDとする。
次に $FA:AD=e:1$ となる点Aをとる。このときAの $x$ 座標は $0$ となる。
そこでAを原点とする座標軸 $A-xy$ を図のようにとる。
ここで $x$ 軸の正の方向は $\overrightarrow{DF}$ の方向にとる。




$DA=p$ とおく。(この長さは符号付きであるから、このことは $AD=-p$ ということでもある。)
このときFの座標は $(ep,0)$ 、準線は $f:x=-p$ となる。

Pから $x$ 軸に下ろした垂線の足をMとする。
Pの座標を $(x,y)$ とおく。
$QP=DM=DA+AM=p+x$ 、 $FP^2=FM^2+MP^2=(ep-x)^2+y^2$
$\overline{PF}:\overline{PQ}=e:1$ より、 $\overline{PF}=e\overline{PQ}$ 。両辺を2乗して $PF^2=e^2PQ^2$
ゆえに、 $(ep-x)^2+y^2b=e^2(p+x)^2$
これより、 $(1-e^2)x^2+y^2-2ep(1+e)x=0$

ここまでは共通である。以下 $e$ の値により場合分けする。

(1)　$e=1$　のとき、　$y^2-4px=0$　となる。焦点　$F(p,0)$　、準線は　$f:x=-p$　となる。

(2)　$0<e<1$　のときは、両辺を　$1-e^2$　で割って、　$x^2+\dfrac{y^2}{1-e^2}-\dfrac{2ep(1+e)}{1-e^2}x=0$

よって、　$x^2+\dfrac{y^2}{1-e^2}-\dfrac{2ep}{1-e}x=0$　・・・①

ここで　$a,b>0$　を

$\dfrac{ep}{1-e}=a$　かつ　$\dfrac{1}{1-e^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$　を満足するように定める。(このように定めることは可能である。)

そのとき、　$x^2+\dfrac{a^2}{b^2}y^2-2ax=0$　これを変形すると　$\dfrac{(x-a)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

ここで新しい座標軸として、次のような　$O-XY$　軸を導入する。

それは原点　$O$　が　$(a,0)$　となるように、　$A-xy$　を　$x$　軸の正の方向に　$a$　だけ平行移動したものである。

この座標軸で表現すれば、　$\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$　・・・②となる。

A よりO は正の方向にあるので　$OA=-a$　である。

このとき、　$\dfrac{ep}{1-e}=a$　より、　$p=\dfrac{1-e}{e}a$　かつ　$\dfrac{1}{1-e^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$　より、　$e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$

このルートの中が正であることより、　$1-\dfrac{b^2}{a^2}>0$　したがって　$a^2>b^2$　すなわち　$a>b>0$　である。

焦点と準線を求める。

$$OF=OA+AF=-a+ep=-a+e\cdot\frac{1-e}{e}a=-ae$$

$$OD=OA+AD=-a-p=-a-\frac{1-e}{e}a=-\frac{a}{e}$$

以上により、焦点　$F(-ae,0)$　、準線　$X=-\dfrac{a}{e}$　となる。

②は　$Y$　軸に対して対称な式であるから、焦点、準線はもう一つあり、

焦点　$F'(ae,0)$　、準線　$X=\dfrac{a}{e}$　である。

---

(まとめ)楕円　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　(　$a>b>0$　)について

離心率は　$e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\dfrac{c}{a}$

焦点は　$F(-ae,0)$　,　$F'(ae,0)$

準線は　$x=\dfrac{a}{e}=\dfrac{a^2}{c}$　,　$x=-\dfrac{a}{e}=-\dfrac{a^2}{c}$

(3) $e>1$ のとき、①より $x^2+\dfrac{y^2}{1-e^2}-\dfrac{2ep}{1-e}x=0$

ここで $a,b>0$ を

$\dfrac{ep}{e-1}=a$ かつ $-\dfrac{1}{1-e^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$ を満足するように定める。(このように定めることは可能である。)

そのとき、 $x^2-\dfrac{a^2}{b^2}y^2+2ax=0$ これを変形すると $\dfrac{(x+a)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

ここで新しい座標軸として、次のような $O-XY$ 軸を導入する。

それは原点Oが $(-a,0)$ となるように、 $A-xy$ を $x$ 軸の正の方向に $-a$ だけ平行移動したものである。

この座標軸で表現すれば、 $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ ･･･③となる。

AよりOは負の方向にあるので、 $OA=a$ である。

このとき、 $\dfrac{ep}{e-1}=a$ より、 $p=\dfrac{e-1}{e}a$ かつ $-\dfrac{1}{1-e^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$ より、 $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$

焦点と準線を求める。

$$OF=OA+AF=a+ep=a+e\cdot\frac{e-1}{e}a=ae$$

$$OD=OA+AD=a-p=a-\frac{e-1}{e}a=\frac{a}{e}$$

以上により、焦点 $F(ae,0)$ 、準線 $X=\dfrac{a}{e}$ となる。

③は $Y$ 軸に対して対称な式であるから、焦点、準線はもう一つあり、

焦点 $F'(-ae,0)$ 、準線 $X=-\dfrac{a}{e}$ である。

---

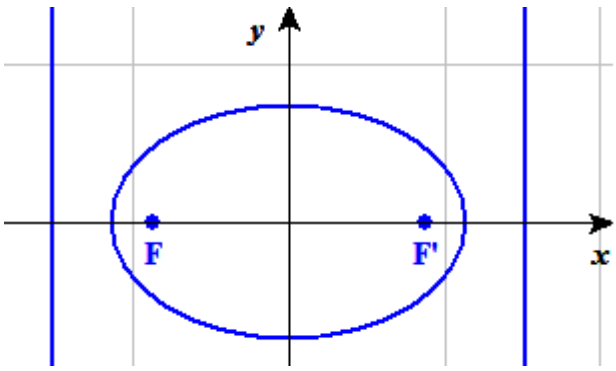
(まとめ)双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について

離心率は $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\dfrac{c}{a}$

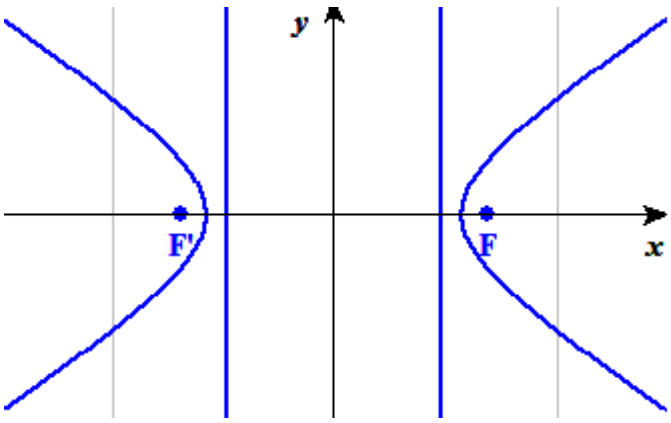
焦点は $F(ae,0)$ , $F'(-ae,0)$

準線は $x=\dfrac{a}{e}=\dfrac{a^2}{c}$ , $x=-\dfrac{a}{e}=-\dfrac{a^2}{c}$

(楕円)




(双曲線)




(参考文献)代数学幾何学精鋭(岩切)