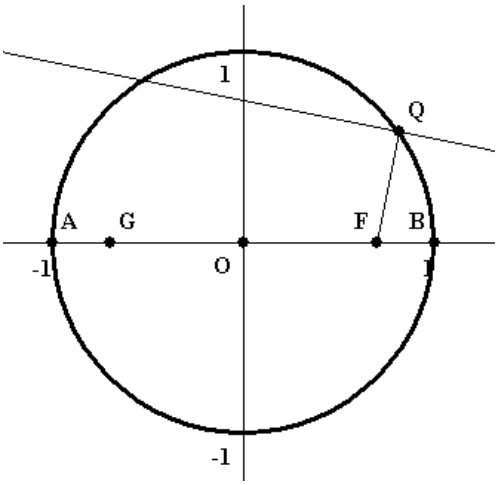
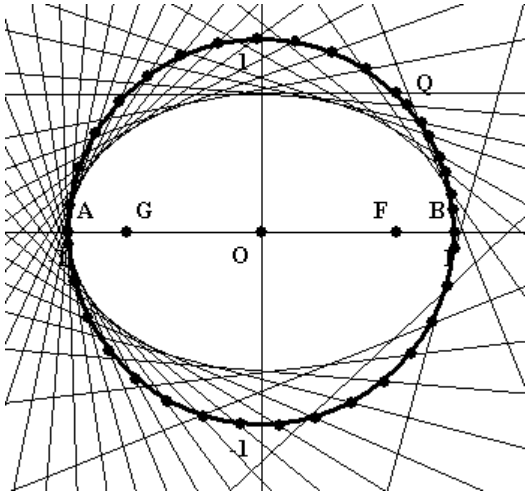
包絡線で楕円を描く

楕円の導入に包絡線を用いた方法があるので、メモしておく。

図のように半径aの円の直径をＡＢとし、直径上に AG=BF となる点 F,G をとる。
円周上に点 Q をとり、Q を通り FQ と垂直な直線を描く。これを点 Q の位置を変えて続けると、包絡線として楕円が現れる。



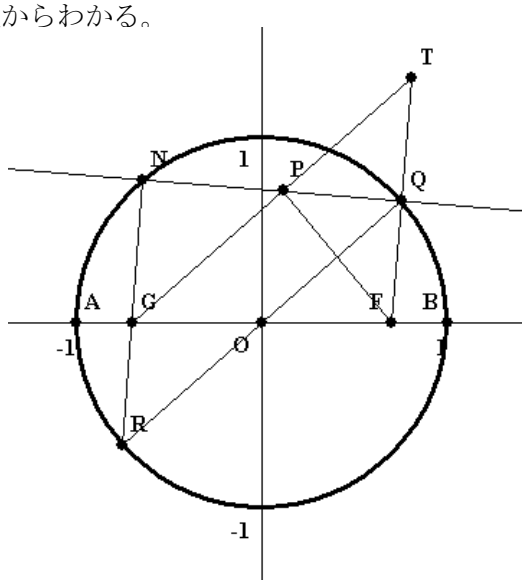


（図は半径１のもの）

これが包絡線がなぜ楕円となるかを楕円の定義を使って、生徒に考えさせるとよい。
しかし少しはヒントが必要である。
<u>まずどのような点が楕円を描くのかを見つける必要がある。</u>

ここでは天下り的に、次のような点Ｐを与えることにする。
（Ｐのとり方）$FQ = QT$ となる点 T を FQ の延長線上にとる。
FQ の Q を通る垂線lが円と交わる点を N とし､直線 QN と直線 TG との交点を P とする。

この点 P が楕円上にあることを示す。
円の中心を O とし、直線 QO が Q 以外で円と交わる点を R とする。
このとき、$QN \perp NR$ であることは、円周角の定理からわかる。
また円の対称性より $GR = FQ = QT$ であるから
四角形 TGRQ は平行四辺形である。
よって $TG = QR$ （一定）である。



以上のことから
$FP + PG = TP + PG = TG = QR$ （直径 2a：一定）
となるので、点 P の軌跡は楕円である。
これは点$F(c,0), G(-c,0)$を焦点とする楕円
である。

まだ解決してないことは、点Ｐの軌跡が包絡線と一致することである。

（証明１）これを初等幾何的に示してみる。
l 上に点Ｐがあることは分かっている。
直線 l 上に点Ｐ以外の点Ｓをとると、$FR+RG=TR+RG>TG=QR$
よって l 上の点Ｐ以外の任意の点は楕円の外部にある。よって直線 l 上は楕円の接線である。

（証明２）
次に式でこれを証明してみる。簡単のため、半径 $a=1$ とする。
点Ｐを計算すると

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FT}=\overrightarrow{OF}+2\overrightarrow{FQ}$$
$$=(c,0)+2(\cos\theta-c,\sin\theta)$$
$$=(2\cos\theta-c,2\sin\theta)$$

よって l の方程式は、$y=\dfrac{c-\cos\theta}{\sin\theta}x+\dfrac{1-c\cos\theta}{\sin\theta}$　・・・①である。

これが $F(c,0),G(-c,0)$ を焦点とする楕円の方程式 $x^2+\dfrac{y^2}{1-c^2}=1$ ・・・②に接することを示せばよい。①を②に代入して

$$(1-c^2)x^2+\left(\frac{c-\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{1-c\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2=1-c^2$$

両辺に $\sin^2\theta$ を掛けて

$$(1-c^2)\sin^2\theta x^2+\left\{(c-\cos\theta)x+(1-c\cos\theta)\right\}^2=(1-c^2)\sin^2\theta$$

展開して x について整理すれば

$$\left\{(1-c^2)\sin^2\theta+(c-\cos\theta)^2\right\}x^2+2(c-\cos\theta)(1-c\cos\theta)x+(1-c\cos\theta)^2-(1-c^2)\sin^2\theta=0$$

整理して
$$(c\cos\theta-1)^2x^2+2(c-\cos\theta)(1-c\cos\theta)x+(\cos\theta-c)^2=0$$
判別式Ｄを計算すると

$\dfrac{D}{4}=\left\{(c-\cos\theta)(1-c\cos\theta)\right\}^2-(c\cos\theta-1)^2(\cos\theta-c)^2=0$　となるので接することが分かる。

微積分の包絡線の知識を用いると、次のように楕円の式を導出できる。
①より $F(x,y,\theta)=(c-\cos\theta)x-(\sin\theta)y+(1-c\cos\theta)=0$　となる。
この包絡線は、$F(x,y,\theta)=0$ と $F_\theta(x,y,\theta)=0$ の２式から、θ を消去すればよい。（微積分の知識）

$$\begin{cases} F(x,y,\theta)=(c-\cos\theta)x-(\sin\theta)y+(1-c\cos\theta)=0 \\ F_\theta(x,y,\theta)=(\sin\theta)x-(\cos\theta)y+c\sin\theta=0 \end{cases}$$

これらの式を $\cos\theta,\ \sin\theta$ について整理して

$$\begin{cases} F(x,y,\theta)=(x+c)\cos\theta+y\sin\theta=cx+1\cdots\cdots③ \\ F_\theta(x,y,\theta)=-y\cos\theta+(x+c)\sin\theta=0\cdots\cdots④ \end{cases}$$

③× y +④× $(x+c)$ で

$$\begin{array}{rl} & (x+c)y\cos\theta+y^2\sin\theta=(cx+1)y \\ +) & -(x+c)y\cos\theta+(x+c)^2\sin\theta=0 \\ \hline & \left\{(x+c)^2+y^2\right\}\sin\theta=(cx+1)y \end{array}$$

ゆえに、 $\sin\theta=\dfrac{(cx+1)y}{(x+c)^2+y^2}$ ・・・⑤

同様にして③× $(x+c)$ −④× y で

$$\begin{array}{rl} & (x+c)^2\cos\theta+(x+c)y\sin\theta=(cx+1)(x+c) \\ +) & -y^2\cos\theta+(x+c)y\sin\theta=0 \\ \hline & \left\{(x+c)^2+y^2\right\}\cos\theta=(cx+1)(x+c) \end{array}$$

ゆえに、 $\cos\theta=\dfrac{(cx+1)(x+c)}{(x+c)^2+y^2}$ ・・・⑥

⑤⑥を $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入して

$$\frac{(cx+1)^2(x+c)^2}{\left\{(x+c)^2+y^2\right\}^2}+\frac{(cx+1)^2y^2}{\left\{(x+c)^2+y^2\right\}^2}=1$$

分母を払って

$$(cx+1)^2(x+c)^2+(cx+1)^2y^2=\left\{(x+c)^2+y^2\right\}^2$$

$$(cx+1)^2\left\{(x+c)^2+y^2\right\}=\left\{(x+c)^2+y^2\right\}^2$$

両辺を $(x+c)^2+y^2$ で割って
$(cx+1)^2=(x+c)^2+y^2$

整理して、$x^2+\dfrac{y^2}{1-c^2}=1$　を得る。これは楕円である。

このやり方は微積分の知識を使うので、高校生には無理かもしれない。
そこで判別式を用いる方法でやってみる。

すべてのθに対して、lの方程式$y=\dfrac{c-\cos\theta}{\sin\theta}x+\dfrac{1-c\cos\theta}{\sin\theta}$　がある楕円の式$\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$
に接するとしてA,Bの値を求めよう。（これなら高校生でもできる）

$\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$　を変形して、$B^2x^2+A^2y^2=A^2B^2$として、$y=\dfrac{c-\cos\theta}{\sin\theta}x+\dfrac{1-c\cos\theta}{\sin\theta}$　を
代入すれば

$$B^2x^2+A^2\left\{\frac{c-\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{1-c\cos\theta}{\sin\theta}\right\}^2=A^2B^2$$

両辺に$\sin^2\theta$を掛けて

$$B^2\sin^2\theta x^2+A^2\left\{(c-\cos\theta)x+(1-c\cos\theta)\right\}^2=A^2B^2\sin^2\theta$$

展開してxについて整理すれば

$$\left\{B^2\sin^2\theta+A^2(c-\cos\theta)^2\right\}x^2+2A^2(c-\cos\theta)(1-c\cos\theta)x+A^2(1-c\cos\theta)^2-A^2B^2\sin^2\theta=0$$

判別式D＝０であるから

$$\frac{D}{4}=\left\{A^2(c-\cos\theta)(1-c\cos\theta)\right\}^2-\left\{B^2\sin^2\theta+A^2(c-\cos\theta)^2\right\}\left\{A^2(1-c\cos\theta)^2-A^2B^2\sin^2\theta\right\}=0$$

両辺をA^2で割って計算すると

$$A^2(c-\cos\theta)^2(1-c\cos\theta)^2=$$
$$(1-c\cos\theta)^2B^2\sin^2\theta+A^2(1-c\cos\theta)^2(c-\cos\theta)^2-B^4\sin^4\theta-A^2B^2\sin^2\theta(c-\cos\theta)^2$$

$$(1-c\cos\theta)^2B^2\sin^2\theta-B^4\sin^4\theta-A^2B^2\sin^2\theta(c-\cos\theta)^2=0$$

両辺を$B^2\sin^2\theta$で割って
$(1-c\cos\theta)^2-B^2\sin^2\theta-A^2(c-\cos\theta)^2=0$
$\sin\theta$を$\cos\theta$で表して、$\cos\theta$について整理すれば
$(c^2-A^2+B^2)\cos^2\theta+2c(A^2-1)\cos\theta-(c^2A^2+B^2-1)=0$
$\cos\theta$の恒等式と考えて、係数＝０とすれば
$c^2=A^2-B^2,\ A^2=1,\ c^2A^2+B^2-1=0$　となり、

これより$A^2=1,\ B^2=1-c^2$となるので、楕円の式は$x^2+\dfrac{y^2}{1-c^2}=1$　となる。
これは点$F(c,0),G(-c,0)$を焦点とする楕円なので、これは点Ｐの軌跡と一致することが確かめられた。

（付け加え）

$F(x,y,\theta)=0$ と $F_\theta(x,y,\theta)=0$ の２式から、x,y について解けば、楕円の媒介変数表示を得る。

$$\begin{cases} F(x,y,\theta)=(c-\cos\theta)x-(\sin\theta)y+(1-c\cos\theta)=0\cdots⑤ \\ F_\theta(x,y,\theta)=(\sin\theta)x-(\cos\theta)y+c\sin\theta=0\cdots⑥ \end{cases}$$

⑤$\times\cos\theta-$⑥$\times\sin\theta$

$$\begin{array}{rl} & (c-\cos\theta)\cos\theta x-(\cos\theta\sin\theta)y+(1-c\cos\theta)\cos\theta=0 \\ -) & \qquad\quad (\sin^2\theta)x-(\cos\theta\sin\theta)y+c\sin^2\theta=0 \\ \hline & \left\{(c-\cos\theta)\cos\theta-\sin^2\theta\right\}x+(1-c\cos\theta)\cos\theta-c\sin^2\theta=0 \end{array}$$

これより、$(c\cos\theta-1)x+\cos\theta-c=0$　よって $x=\dfrac{\cos\theta-c}{1-c\cos\theta}$

⑤$\times\sin\theta-$⑥$\times(c-\cos\theta)$

$$\begin{array}{rl} & (c-\cos\theta)\sin\theta x-(\sin^2\theta)y+(1-c\cos\theta)\sin\theta=0 \\ -) & (c-\cos\theta)\sin\theta x-(c-\cos\theta)(\cos\theta)y+c\sin\theta(c-\cos\theta)=0 \\ \hline & \left\{(c-\cos\theta)\cos\theta-\sin^2\theta\right\}y+(1-c\cos\theta)\sin\theta-c\sin\theta(c-\cos\theta)=0 \end{array}$$

これより、$(c\cos\theta-1)y=(c^2-1)\sin\theta$　よって $x=\dfrac{(1-c^2)\sin\theta}{1-c\cos\theta}$

この媒介変数表示は、直線 TG の方程式 $y=(\tan\theta)x+c\tan\theta$ と l の方程式

$y=\dfrac{c-\cos\theta}{\sin\theta}x+\dfrac{1-c\cos\theta}{\sin\theta}$ を連立させて点Ｐの座標を求めたもの

$P\left(\dfrac{\cos\theta-c}{1-c\cos\theta},\dfrac{(1-c^2)\sin\theta}{1-c\cos\theta}\right)$　に一致する。（計算略）

これが $x^2+\dfrac{y^2}{1-c^2}=1$ を満たすことは代入して計算すれば容易に分かる。（省略）

グラフは fcview で作ってある。