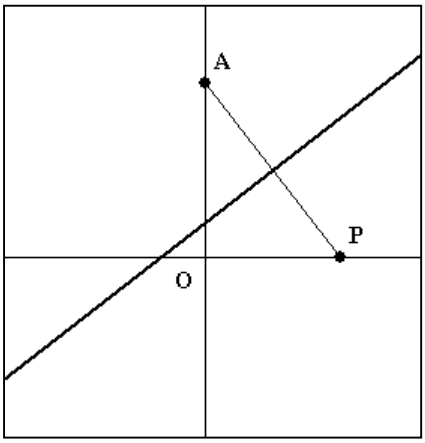
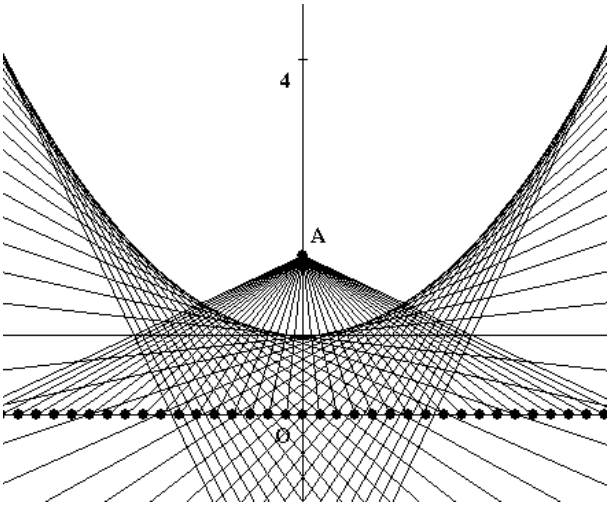
２次曲線を折る（包絡線で放物線、楕円を描く）

四角い紙を用意し、定点Ａをとる。
次に底辺上の任意の点Ｐをとり、ＡＰの垂直二等分線を引く。
（これは底辺が点Ａと重なるように紙を折ることで実現できる。）
このようにすると折り目の線の包絡線として、放物線が現れる。





これを説明する。座標軸を入れて考える

$A(0,b),\ P(a,0)$ とすると、ＡＰの垂直二等分線は　$y-\dfrac{b}{2}=\dfrac{a}{b}\left(x-\dfrac{a}{2}\right)$　である。

これより、$2ax-2by-a^2+b^2=0$　を得る。
$F(x,y,a)=2ax-2by-a^2+b^2$ とおく。

包絡線の求め方は、$F(x,y,a)=0$ と $F_a(x,y,a)=0$ から a を消去すればよい。
$F_a(x,y,a)=2x-2a=2(x-a)$　であるから

$\begin{cases} 2ax-2by-a^2+b^2=0 \\ x-a=0 \end{cases}$　から a を消去すればよい。

すると、$x=a$ であるから、$2x^2-2by-x^2+b^2=0$

ゆえに、$y=\dfrac{1}{2b}x^2+\dfrac{b}{2}$　を得る。

また、a を消去せずに、x,y について解けば、$x=a,\ y=\dfrac{1}{2b}a^2+\dfrac{b}{2}$　という媒介変数表示を得る。

同じことを、「互除法を用いた終結式」でやってみる。

$F(x,y,a)=2ax-2by-a^2+b^2$ を a について整理して、

$F(x,y,a)=-a^2+2xa+(b^2-2by)=0$

$F_a(x,y,a)=2x-2a$ も a について整理して、

$F_a(x,y,a)=-a+x$

ゆえに、互除法より

$$\frac{-a^2+2xa+(b^2-2by)}{-a+x}=\frac{a^2-2xa+(2by-b^2)}{a-x}=(a-x)+\frac{2by-b^2-x^2}{a-x}$$

終結式は「互除法を行って最後に残った定数項の分子に現れる最大次数の既約多項式」である。したがって終結式は $2by-b^2-x^2$ である。

$F(x,y,a)=0$ と $F_a(x,y,a)=0$ は、a について考えると共通根 $x=a$ をもつ。
なぜなら、第２式より $x=a$ で、これを第１式に代入すると $F(a,y,a)=0$。これは $F(x,y,a)=0$ が解 $x=a$ をもつことを意味するからである。

したがって、終結式＝０でなければならない。

ゆえに、$2by-b^2-x^2=0$ であるから、$y=\dfrac{1}{2b}x^2+\dfrac{b}{2}$ を得る。

最後に行列式の終結式でやってみる。

$$\begin{vmatrix} 1 & -2x & 2by-b^2 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}=0$$

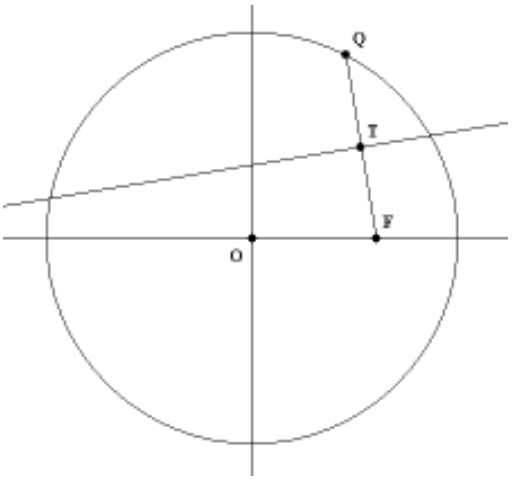
ゆえに、$\begin{vmatrix} -x & 0 \\ 1 & -x \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -2x & 2by-b^2 \\ 1 & -x \end{vmatrix}=x^2-(2x^2-2by+b^2)=-x^2+2by-b^2$

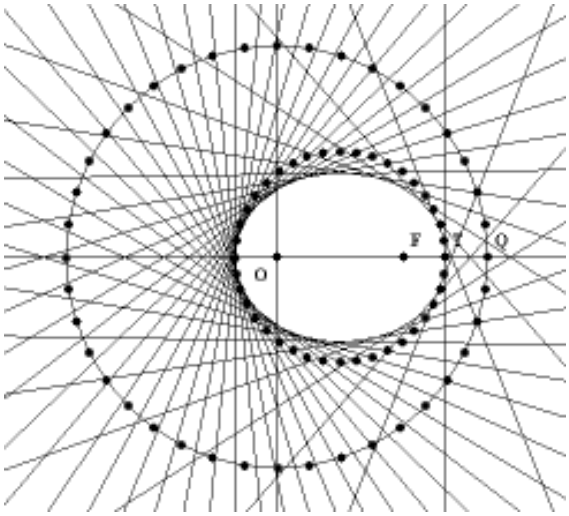
終結式＝０でなければならないので、$-x^2+2by-b^2=0$

ゆえに、$y=\dfrac{1}{2b}x^2+\dfrac{b}{2}$ を得る。

次に楕円になる場合を考える。
図のように定円 O の内部に、中心 O と異なる定点Ｆをとる。
Q は円周上の動点とし、線分 FQ の垂直二等分線を l とする。
Q が動くと、直線 l はある楕円に接しながら動く。

これは円形の紙を焦点 F を円周上の点 Q と重なるように折ったときの折り目が直線 l ということである。





（理由）
半径 OQ は直線 l と交わるので、その交点をＰとすると
$OP + PF = OP + PQ = OQ$ （＝半径）
ゆえに点Ｐは焦点が O,F で長軸が円 O の半径に等しい楕円上にある。
次に直線 l がこの楕円に接することを示す。
直線 l 上に点Ｐ以外の点 R をとると、$OR + RF = OR + RQ > OQ$
よって、直線 l の点 P 以外の任意の点は、楕円の外部にある。
以上により、直線 l は楕円の接線である。
すなわち、直線 l の包絡線は楕円となることがわかった（終）

図は fctview で作成した。

（参考文献）数学セミナー　共通因数をさがす　西山享