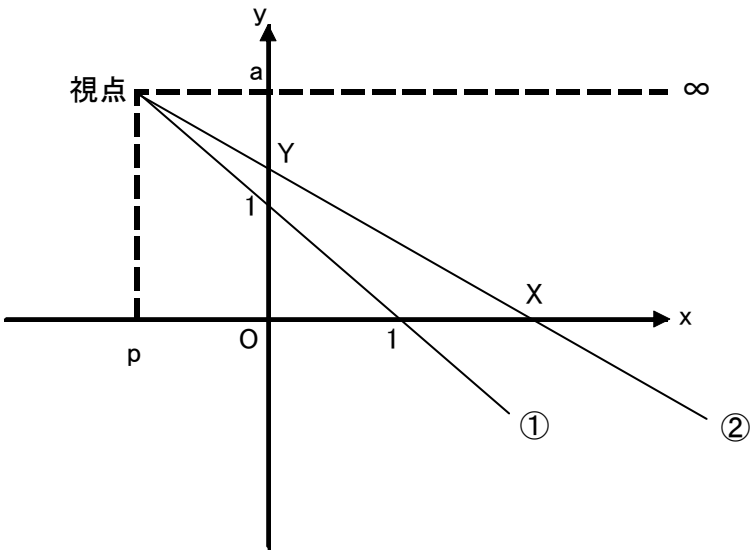
放物線をキャンバスに描くとどうなるか



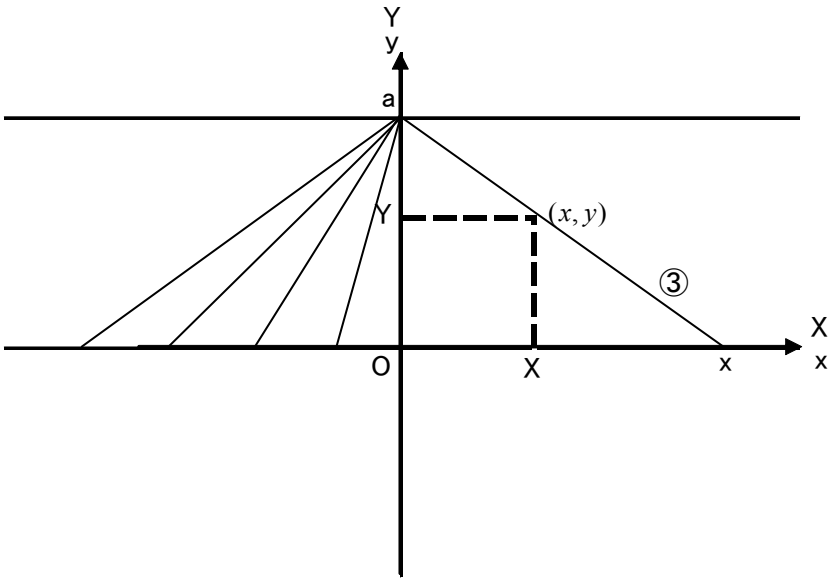
簡単のため、上の図のように座標軸を入れる。ここでｙ軸はキャンバスを表すとする。
対応は、$a \leftrightarrow \infty$，$1 \leftrightarrow 1$ とする。
このときｙ軸上の点Ｙがｘ軸上の点Ｘに対応するとすると、
①は$y=-x+1$であるから、$a=-p+1$より、$p=1-a$である。
このとき②は$y=\dfrac{Y-a}{-(1-a)}x+Y$ゆえ、$0=\dfrac{Y-a}{-(1-a)}X+Y$

これより$X=\dfrac{(1-a)Y}{Y-a}$

すなわち、$Y \leftrightarrow X=\dfrac{(1-a)Y}{Y-a}$　という対応があることがわかった。

この逆対応は、$X \leftrightarrow Y=\dfrac{aX}{X+a-1}$　となることが簡単な計算でわかる。

以上の準備を用いて、今度は平面上の点をキャンバス上に射影することを考える。



今度は xy 平面を上から俯瞰し、キャンバスに射影する。キャンバス上に座標軸 XY をとる。
平面上の点とキャンバス上の点との関係 $(x, y) \leftrightarrow (X, Y)$ について考える。

Yについては先ほどのXをyに変えればよいので、$Y = \dfrac{ay}{y+a-1}$ となる。

次にXについては③の式が $Y = -\dfrac{a}{x}X + a$ であることから、$X = \dfrac{(a-Y)x}{a}$ となる。

すなわち、$(x, y) \leftrightarrow (X, Y) = \left(\dfrac{(a-Y)x}{a}, \dfrac{ay}{y+a-1} \right)$ となる。

この逆変換は $(X, Y) \leftrightarrow (x, y) = \left(\dfrac{aX}{a-Y}, \dfrac{Y(1-a)}{a-Y} \right)$ となる。（計算略）

以上を利用して、$y = x^2$ をキャンバス上に射影するとどうなるかを考える。

$y = x^2$ より $\dfrac{Y(1-a)}{a-Y} = \left(\dfrac{aX}{a-Y} \right)^2$ となる。これを整理すると

$a^2X^2 + (a-1)\left(Y - \dfrac{a}{2} \right)^2 = \dfrac{a^2}{4}(a-1)$ となる。これは楕円を表す。