シュタイナーの円環における半径の間の公式

参考文献[1]（森継）によれば、n=3 のとき、次が成り立つ。ただし、R は大円の半径、r は大円に含まれる小円の半径、 $r_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ は大円と小円の間に接するようにかかれている円の半径とする。

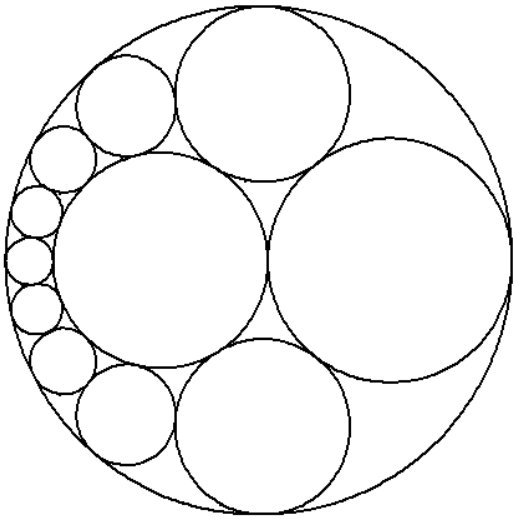
$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$$

この式について、一般の奇数についてはどのような式が成り立つかということに興味を持ったので計算してみたが、後に数学セミナー 2014 年 7 月号のエレガントな解答を求むの欄で既に結果が示されていたということを知った。ここでは自分の証明を公開したい。

定理1
シュタイナーの円環について、n が奇数のとき

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r_n}=\frac{2n(R-r)}{(R-r)^2-d^2}=\frac{n(R-r)}{2Rr\tan^2\frac{\pi}{n}}$$ が成り立つ。

ただし、R は大円の半径、r は大円に含まれる小円の半径、 $r_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ は大円と小円の間に接するようにかかれている円の半径、d は大円と小円の中心間の距離とする。



（参考）シュタイナーの閉形定理により、次の結果は有名な事実となっている。
【シュタイナーの閉形定理】
2つの円があって、一方の円内に他方があるとする。両者の間に互いに接するように円を描く。何個目かの円を描いて最初に描いた円と初めて共通点をもつとき、それがちょうど接しているかどうかは、元の2つの円（中心と半径）で決まっており、最初の円を描く位置には依らない。しかも内部に内接する円の数は一定であり、隣り合う円の接点はある定円上にある。
証明は省略する。

（定理1の証明）反転を用いる。

原点中心の半径 1 の円に関する反転の式は $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}(x,y)$ である。この変換によって

円 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ がどのように移されるかをまず考える。
ここで移される円は原点を通らないと仮定する。したがって反転の性質より、これは原点を通らない円に移される。

実際に代入すると

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}-p\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}-q\right)^2=r^2$$ となる。計算していくと

$$\Leftrightarrow\ \left\{x-p(x^2+y^2)\right\}^2+\left\{y-q(x^2+y^2)\right\}^2=r^2(x^2+y^2)^2$$

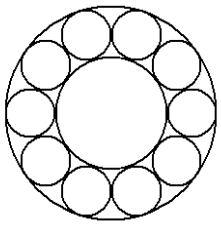
$$\Leftrightarrow\ (p^2+q^2-r^2)(x^2+y^2)-2px-2qy+1=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{p}{p^2+q^2-r^2}\right)^2+\left(y-\frac{q}{p^2+q^2-r^2}\right)^2=\frac{r^2}{(p^2+q^2-r^2)^2}$$

よって原点中心の半径１の円に関する反転によって

円 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ は、中心が $\left(\frac{p}{p^2+q^2-r^2},\frac{q}{p^2+q^2-r^2}\right)$ ，半径が $\frac{r}{\left|p^2+q^2-r^2\right|}$ の円に移されることがわかった。・・・・・①

これを用いて円環がどのように移されるかをみる。



シュタイナーの円環を生成する前の同心円の大円の半径を $\widetilde{R}$
小円の半径を $\tilde{r}$ 、円環の半径を l とする。（円環の半径はすべて等しい）
このとき同心円の中心の x 座標を b とすれば
初めの円環の中心の座標は

$$(x_1,y_1)=\left((\tilde{r}+l)\cos\left(\frac{2\pi}{n}+k\right)+b,(\tilde{r}+l)\sin\left(\frac{2\pi}{n}+k\right)\right)$$ と表せる。

ここでｋは円環を適当に回転するためのパラメータであり、こうすることで任意の位置にある円環を反転によって表現することができる。つまり任意の位置にある円環を反転（逆写像）で同心円の円の間の円環に戻したとき、必ずしもその円環の中心のｘ軸の正の方向から測った角が $\frac{2\pi h}{n}$ （ $h=1,2,\cdots,n$ ）とは表されないが、適当なｋを加えれば、円環の中心のｘ軸の正の方向から測った角が $\frac{2\pi h}{n}+k$ （ $h=1,2,\cdots,n$ ）と表されるということである。

半径は先ほどの式より

$$r_1=\frac{l}{\left\{(\tilde{r}+l)\cos\left(\frac{2\pi}{n}+k\right)+b\right\}^2+\left\{(\tilde{r}+l)\sin\left(\frac{2\pi}{n}+k\right)\right\}^2-l^2}$$ となる。

２番目の円環の中心の座標は $(x_2,y_2)=\left((\tilde{r}+l)\cos\left(\frac{4\pi}{n}+k\right)+b,(\tilde{r}+l)\sin\left(\frac{4\pi}{n}+k\right)\right)$ なので

半径は $r_2=\frac{l}{\left\{(\tilde{r}+l)\cos\left(\frac{4\pi}{n}+k\right)+b\right\}^2+\left\{(\tilde{r}+l)\sin\left(\frac{4\pi}{n}+k\right)\right\}^2-l^2}$ となる。

３番目の円環の中心の座標は $(x_3,y_3)=\left((\tilde{r}+l)\cos\left(\frac{6\pi}{n}+k\right)+b,(\tilde{r}+l)\sin\left(\frac{6\pi}{n}+k\right)\right)$ なので

半径は $r_3=\frac{l}{\left\{(\tilde{r}+l)\cos\left(\frac{6\pi}{n}+k\right)+b\right\}^2+\left\{(\tilde{r}+l)\sin\left(\frac{6\pi}{n}+k\right)\right\}^2-l^2}$ となる。

一般にｈ番目の円環の中心の座標は

$$(x_h,y_h)=\left((\tilde{r}+l)\cos\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)+b,(\tilde{r}+l)\sin\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)\right)$$ なので

半径は $r_h=\frac{l}{\left\{(\tilde{r}+l)\cos\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)+b\right\}^2+\left\{(\tilde{r}+l)\sin\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)\right\}^2-l^2}$ となる。

したがって逆数をとれば

$$\frac{1}{r_h}=\frac{\left\{(\tilde{r}+l)\cos\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)+b\right\}^2+\left\{(\tilde{r}+l)\sin\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)\right\}^2-l^2}{l}$$ となる。

これより $l\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r_{2m-1}}\right)$

$$= \sum_{h=1}^{2m-1}\left[\left\{(\tilde{r}+l)\cos\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)+b\right\}^2+\left\{(\tilde{r}+l)\sin\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)\right\}^2-l^2\right]$$

以下簡単のためチルダの記号を以下外して $\tilde{r}$ をしばらくの間 r と表記する。展開して

$$l\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r_{2m-1}}\right) = \sum_{h=1}^{2m-1}\left\{(l+r)^2+2b(l+r)\cos\left(\frac{2\pi h}{2m-1}+k\right)+b^2\right\}-(2m-1)l^2$$

$$= \sum_{h=1}^{2m-1}\left\{2lr+r^2+2b(l+r)\cos\left(\frac{2\pi h}{2m-1}+k\right)+b^2\right\}$$

$$= (2m-1)(2lr+r^2+b^2)+2b(l+r)\sum_{h=1}^{2m-1}\cos\left(\frac{2\pi h}{2m-1}+k\right)$$

$$= (2m-1)(2lr+r^2+b^2)+2b(l+r)\sum_{h=1}^{2m-1}\left(\cos k\cdot\cos\frac{2\pi h}{2m-1}-\sin k\cdot\sin\frac{2\pi h}{2m-1}\right)$$

$$= (2m-1)(2lr+r^2+b^2)+2b(l+r)\left(\cos k\cdot\sum_{h=1}^{2m-1}\cos\frac{2\pi h}{2m-1}-\sin k\cdot\sum_{h=1}^{2m-1}\sin\frac{2\pi h}{2m-1}\right)$$

$$= (2m-1)(2lr+r^2+b^2)+2b(l+r)\left(\cos k\cdot\sum_{h-1}^{2m-1}\cos\frac{2\pi h}{2m-1}-\sin k\cdot\sum_{h-1}^{2m-1}\sin\frac{2\pi h}{2m-1}\right)$$

簡単のため $\theta_h=\frac{2\pi h}{2m-1}$ とおくと

$$= (2m-1)(2lr+r^2+b^2)+2b(l+r)\left(\cos k\cdot\sum_{h=1}^{2m-1}\cos\theta_h-\sin k\cdot\sum_{h=1}^{2m-1}sin\theta_h\right)$$

ここで公式

$$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$ を用いると

$$l\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r_{2m-1}}\right)$$

$$= (2m-1)(2lr+r^2+b^2)$$

$$+\ 2b(l+r)\left(\cos k\cdot\frac{\cos\frac{2m\theta_h}{2}\sin\frac{(2m-1)\theta_h}{2}}{\sin\frac{\theta_h}{2}}-\sin k\cdot\frac{\sin\frac{2m\theta_h}{2}\sin\frac{(2m-1)\theta_h}{2}}{\sin\frac{\theta_h}{2}}\right)$$

この式の中の $\sin\frac{(2m-1)\theta_h}{2}$ は $\sin\pi h$ に等しいから 0 である。

ゆえに、 $l\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r_{2m-1}}\right)=(2m-1)(2lr+r^2+b^2)$ となる。

記号を戻せば

$$l\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r_{2m-1}}\right)=(2m-1)(2l\tilde{r}+\tilde{r}^2+b^2)$$ となる。

よって $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r_{2m-1}}=\frac{2m-1}{l}(2l\tilde{r}+\tilde{r}^2+b^2)$ ・・・・・②である。

一方、これが何に等しくなるかは Excel で計算の実験をして予想がついていて、 $\frac{R-r}{(R-r)^2-d^2}$ の定数倍になることはわかっていた。

先ほどの①より、同心円の小円は中心が $(b,0)$ ，半径 $\tilde{r}$ であるから、反転により

中心が $\left(\frac{b}{b^2-\tilde{r}^2},0\right)$ ，半径 $r=\frac{\tilde{r}}{|b^2-\tilde{r}^2|}$ の円に移る。

今、 $b>\tilde{R}>\tilde{r}$ と仮定して一般性を失わない。よって半径は $r=\frac{\tilde{r}}{b^2-\tilde{r}^2}$ となる。

また、同心円の大円は中心が $(b,0)$ ，半径で $\tilde{R}$ あるから、反転により

中心が $\left(\frac{b}{b^2-\tilde{R}^2},0\right)$ ，半径 $R=\frac{\tilde{R}}{|b^2-\tilde{R}^2|}=\frac{\tilde{R}}{b^2-\tilde{R}^2}$ の円に移る。

よって $$\frac{R-r}{(R-r)^2-d^2}=\frac{\frac{\tilde{R}}{b^2-\tilde{R}^2}-\frac{\tilde{r}}{b^2-\tilde{r}^2}}{\left(\frac{\tilde{R}}{b^2-\tilde{R}^2}-\frac{\tilde{r}}{b^2-\tilde{r}^2}\right)^2-\left(\frac{b}{b^2-\tilde{R}^2}-\frac{b}{b^2-\tilde{r}^2}\right)^2}$$

この右辺を計算していくが、簡単のためチルダの記号を以下外して記述する。

右辺= $$\frac{\{R(b^2-r^2)-r(b^2-R^2)\}(b^2-R^2)(b^2-r^2)}{\{R(b^2-r^2)-r(b^2-R^2)\}^2-\{b(R^2-r^2)\}^2}$$

$$=\frac{(R-r)(b^2+Rr)(b+R)(b-R)(b+r)(b-r)}{(R-r)^2(b^2+Rr)^2-b^2(R+r)^2(R-r)^2}$$

$$=\frac{(b^2+Rr)(b+R)(b-R)(b+r)(b-r)}{(R-r)\{(b^2+Rr)^2-b^2(R+r)^2\}}$$

$$=\frac{(b^2+Rr)(b+R)(b-R)(b+r)(b-r)}{(R-r)\{b^2+Rr+b(R+r)\}\{b^2+Rr-b(R+r)\}}$$

$$=\frac{(b^2+Rr)(b+R)(b-R)(b+r)(b-r)}{(R-r)(b+R)(b+r)(b-R)(b-r)}=\frac{b^2+Rr}{R-r}$$

これは記号を戻せば、 $\frac{R-r}{(R-r)^2-d^2}=\frac{b^2+\tilde{R}\tilde{r}}{\tilde{R}-\tilde{r}}$ ということである。

ここで $\tilde{R}=2l+\tilde{r}$ であるから

$$\frac{R-r}{(R-r)^2-d^2}=\frac{b^2+\tilde{R}\tilde{r}}{\tilde{R}-\tilde{r}}=\frac{b^2+(2l+\tilde{r})\tilde{r}}{2l+\tilde{r}-\tilde{r}}=\frac{b^2+2l\tilde{r}+\tilde{r}^2}{2l}$$

②より $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r_{2m-1}}=\frac{2m-1}{l}(2l\tilde{r}+\tilde{r}^2+b^2)$ であるから

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r_{2m-1}}=\frac{2(2m-1)}{2l}(2l\tilde{r}+\tilde{r}^2+b^2)=\frac{2(2m-1)(R-r)}{(R-r)^2-d^2}$$

すなわち n が奇数のとき

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r_n}=\frac{2n(R-r)}{(R-r)^2-d^2}$$ が成り立つことがわかった。

ここで、シュタイナーの等式より、 $\frac{(R-r)^2-d^2}{4Rr}=\tan^2\frac{\pi}{n}$ であるから代入すると

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r_n}=\frac{2n(R-r)}{(R-r)^2-d^2}=\frac{2n(R-r)}{4Rr\tan^2\frac{\pi}{n}}=\frac{n(R-r)}{2Rr\tan^2\frac{\pi}{n}}$$ を得る。（終）

（注意）今の計算はシュタイナーの円環に移される元の同心円のシュタイナーの円環が存在すると仮定して、そこから計算を始めているが、任意のシュタイナーの円環があったとき、それを同心円のシュタイナーの円環に移す反転が存在することが示されているので、このように計算してもよい。

定理2（池田貞一）
偶数個（n=2k）の円がシュタイナーの円環をなしているとき、向かい合っている円環の円の半径の逆数の和は一定である。すなわち

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_{k+1}}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_{k+2}}=\cdots=\frac{1}{r_k}+\frac{1}{r_{2k}}=\frac{4(R-r)}{(R-r)^2-d^2}$$

（証明）上記と同様に計算していけばよい。記号は同じものを用いる。

$h\in\left\{1,2,3,\cdots,\frac{n}{2}\right\}$ のとき

$$\frac{1}{r_h}=\frac{\left\{(\tilde{r}+l)\cos\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)+b\right\}^2+\left\{(\tilde{r}+l)\sin\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)\right\}^2-l^2}{l}$$

ここで

$$\cos\left\{\frac{2\pi}{n}\left(h+\frac{n}{2}\right)+k\right\}=\cos\left(\frac{2\pi h}{n}+\pi+k\right)=-\cos\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)$$

$$\sin\left\{\frac{2\pi}{n}\left(h+\frac{n}{2}\right)+k\right\}=\sin\left(\frac{2\pi h}{n}+\pi+k\right)=-\sin\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)$$ であることより

$$\frac{1}{r_{h+\frac{n}{2}}}=\frac{\left\{-(\tilde{r}+l)\cos\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)+b\right\}^2+\left\{-(\tilde{r}+l)\sin\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)\right\}^2-l^2}{l}$$ となる。

したがって

$$\frac{1}{r_h}+\frac{1}{r_{h+\frac{n}{2}}}=\frac{\left\{(\tilde{r}+l)\cos\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)+b\right\}^2+\left\{(\tilde{r}+l)\sin\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)\right\}^2-l^2}{l}$$

$$+\frac{\left\{-(\tilde{r}+l)\cos\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)+b\right\}^2+\left\{-(\tilde{r}+l)\sin\left(\frac{2\pi h}{n}+k\right)\right\}^2-l^2}{l}$$

$$=\frac{1}{l}\left\{2(\tilde{r}+l)^2-2l^2+2b^2\right\}=\frac{2}{l}\left(\tilde{r}^2+2\tilde{r}l+b^2\right)=\frac{4(R-r)}{(R-r)^2-d^2}$$ （終）

（参考文献）

[1]シュタイナー環におけるデカルトの円定理の拡張について（Extended Abstract）森継　修一
[2]青空学園 HP　円環の諸定理