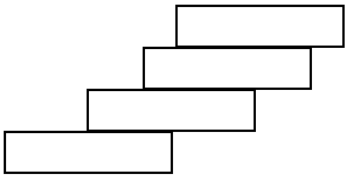
積み木を少しずつずらして、どれだけはりだすことができるだろうか？

（級数　$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$　の応用）

積み木を下の図のように少しずつずらしながら、積んだことがありますか？



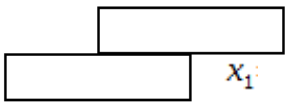
このとき、少しでもバランスが崩れると倒れてしまうことは想像がつくと思います。それではうまくバランスをたもったまま、どのくらいの長さまではり出すことができると思いますか？以下ではこれについて考えてみたいと思います。

（考え方）初めに枚数を 2 枚として考えます。順に 1 枚ずつ増やしていきます。そのとき上の方に積み上げていくと、せっかくバランスを保っていた積み木が崩れてしまうので、積み木は下に滑り込ませるようにしていきます。そうして上のものとのバランスをとっていくことにしましょう。以下で用いる知識は重心のつり合いです。今の場合は力が垂直方向に働くことから、重心の計算は、（支点からの距離）×（重さ）の和と表すことができます。

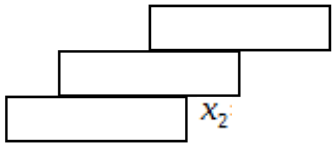
簡単のため、積み木の幅は 1 とし、重さも 1 とします。また、積み木の枚数が全部で n 枚のとき、下から 2 段目の積み木が一番下の積み木の右端から　x_{n-1}　だけはりだすとします。

考え方のコツは、積み木は厚さがありますが、厚さは 0 とします（ものすごく薄い）そして重さは作用点に集まっていルとします。（質点と考える）

積み木が 2 段のとき
上の積み木の真ん中が下の積み木の右端に
くるように置けばよいので、　$x_1=\frac{1}{2}$



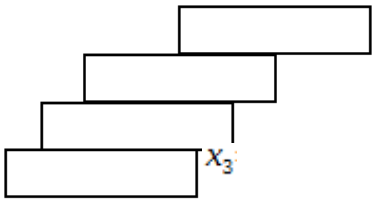
積み木が 3 段のとき
上から 1 個目と 2 個目の積み木はそれぞれ
1 つの質点と見ます。すると右図下のようになります。
（右側の●点が一番上の積み木の質点で、左側の●点が
上から 2 番目の積み木の質点、真ん中の▲点が支点）
重心は一番下の積み木の右端にあればよいので
次の方程式が成り立つ。



$$1\times x_2=\left(\frac{1}{2}-x_2\right)\times 1$$

これより、　$x_2=\frac{1}{4}$　となる。

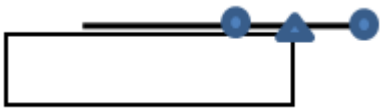
積み木が 4 段のとき
上から 1 個目と 2 個目の積み木をまとめて1つとみなし
1 つの質点と見ます。そして上から 3 番目の積み木は
1 つの質点と見ます。すると右図下のようになります。
（右側の●点が上から 1 個目と 2 個目の積み木の質点
左側の●点が上から 3 番目の積み木の質点、
真ん中の▲点が支点）



重心は一番下の積み木の右端にあればよいので
次の方程式が成り立つ。

$$2\times x_3=\left(\frac{1}{2}-x_3\right)\times 1$$

これより、 $x_3=\frac{1}{6}$ となる。



一般に、積み木が n 段のとき
上から 1 個目と n-1 個目の積み木をまとめて1つとみなし
1 つの質点と見ます。そして上から n 番目の積み木は
1 つの質点と見ます。
（右側の●点が上から 1 個目から n-2 個目の積み木の質点
左側の●点が上から n-1 番目の積み木の質点、真ん中の▲点が支点）
すると同様にして

$$(n-2)\times x_{n-1}=\left(\frac{1}{2}-x_{n-1}\right)\times 1$$ これより、 $x_{n-1}=\frac{1}{2(n-1)}$ となる。

以上のことから、積み木を n 段積んだとき、はり出しの長さは

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)}$$ となる。

ここで教科書の不等式を思い出すと、 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1)$ でした。

ゆえに、 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)}\right)=\infty$ であるから、無限にはり出すことができるということがわかりました。

それではどのくらいの数が必要になるのか、計算してみましょう。

表計算ソフトで計算したところ、5m はり出すためには、12367 個の積み木が必要であるとのことです。
無限に伸ばすことができるとは言っても、発散のスピードはかなり遅いということがわかります。

n	1/n	1から1/nまでの和	左の1/2
12365	8.09E-05	9.99988	4.99994
12366	8.09E-05	9.99996	4.99998
12367	8.09E-05	10.00004	5.00002
12368	8.09E-05	10.00012	5.00006
12369	8.08E-05	10.00020	5.00010