さくらん順列（完全順列）になる確率

n 枚のカードを並べ替えるとき、n 枚が元の位置にない並べ方を「n 枚のさくらん順列（完全順列）」という。

> n 枚のさくらん順列の総数を D_n とすると、次の漸化式が成り立つ。
> $D_1 = 0$,　$D_2 = 1$,　$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$　（$n \geq 3$）

（証）n 枚のカードに番号を 1, 2, ・・・, n とつけ、それらを並べ替えた先の場所にも番号を 1, 2, …, n とつける。また関数 $f(k)$ で k の位置にあるカードの番号を表すとする。
$f(1) = a$　（ただし $a \neq 1$）とする。

場所	1	2	3	・・・	n−1	n
f	a					

$a = 2$ のときを考える。次の２つの場合がある。

(1)　$f(2) = 1$

場所	1	2	3	・・・	n−1	n
f	2	1		・・・		

(2)　$f(2) \neq 1$

場所	1	2	3	・・・	n−1	n
f	2	1以外		・・・		

(1) のときは 3, 4, ・・・, n のさくらん順列の総数だけあるので、D_{n-2} 通りある。
(2) のときは 1, 3, 4, ・・・, n を並べることになるが、場所の１と場所に２を入れ替えて考えると、この状況は 1, 3, 4, ・・・, n のさくらん順列に等しい。よって D_{n-1} 通りある。
したがって、合わせて、$D_{n-1} + D_{n-2}$ 通りである。
$a = 3, 4, \cdots, n$ の場合も考えて全部で $D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$　を得る。（終）

次に、この漸化式を解き一般項を求めよう。
両辺を $n!$ で割って

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{n-1}{n!}(D_{n-2} + D_{n-1})$$
$$= \frac{n-1}{n!}D_{n-2} + \frac{n-1}{n!}D_{n-1}$$
$$= \frac{n-1}{n(n-1)\cdot(n-2)!}D_{n-2} + \frac{n-1}{n\cdot(n-1)!}D_{n-1}$$

ここで $a_n = \dfrac{D_n}{n!}$　とおくと

$$a_n = \frac{1}{n}a_{n-2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)a_{n-1}$$

$$= \frac{1}{n}a_{n-2} + a_{n-1} - \frac{1}{n}a_{n-1}$$

したがって、$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n}a_{n-2} - \frac{1}{n}a_{n-1} = -\frac{1}{n}(a_{n-1} - a_{n-2})$　　（$n \geq 3$）

$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とおくと、$n \geq 3$のとき

$$b_n = -\frac{1}{n+1}b_{n-1}$$

$$= \left(-\frac{1}{n+1}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)b_{n-2}$$

$$\cdots = \left(-\frac{1}{n+1}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)b_1$$

ここで$b_1 = a_2 - a_1 = \frac{D_2}{2!} - \frac{D_1}{1!} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

ゆえに

$$b_n = \left(-\frac{1}{n+1}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{n+1}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{1}\right) = (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}$$

よって$n \geq 2$のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{(k+1)!} = a_1 + \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$$

$a_1 = 0$であるから、$a_n = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$

ここで$k=1$と$k=2$の項はキャンセルするので、加えると

$a_n = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$　となる。

したがって、$D_n = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$　である。これは$n=1,2$のときも成り立つ。（終）

次に n 文字の順列を 1 つ無作為に作ったとき、それがさくらん順列になる確率を考える。
これは上から用意に計算できて

$p_n = \frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$　となる。

枚数 n を無限大にすれば、これは$e^{-1} = \frac{1}{e}$となる。

すなわち、枚数が非常に多い場合はさくらん順列になる確率は$\frac{1}{e}$であるということで、このようなところに自然対数の底が現れるのは非常に興味深い。
n が小さいときの確率を表にしておく。

n				1
1	−1	1	−1.0000000000	0.00000
2	1	2	0.5000000000	0.50000
3	−1	6	−0.1666666667	0.33333
4	1	24	0.0416666667	0.37500
5	−1	120	−0.0083333333	0.36667
6	1	720	0.0013888889	0.36806
7	−1	5040	−0.0001984127	0.36786
8	1	40320	0.0000248016	0.36788
9	−1	362880	−0.0000027557	0.36788

エクセルの実験シートも作成した。この表の値と比較することができる。

参考文献

[1] 数学ひとり旅　　石谷　茂